MATEMATICA PARA MECANICA DEL AUTOMOTOR – 1ro. 1ra. – CFP 3100

TP 1

En esta parte vas a poder estudiar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, sobre los números reales. Para esto se ofrece una descripción de cada una y ejemplos. Al final resolverás ejercicios para que repases los temas estudiados.

La aritmética es la parte de la matemática que estudia los conjuntos numéricos, sus operaciones y, sus propiedades y lo que puede hacerse con ellos. En este apunte contemplamos algunos ejemplos cotidianos para facilitar la interpretación del problema.

El sistema numérico actual (llamado arábigo) no fue inventado por los árabes, sino por los hindúes, ellos recogieron este gran conocimiento y lo introdujeron en Europa, al cero lo llamaron céfer, que en el idioma árabe significa vacío. Este nuevo sistema de numeración muy lentamente fue llegando a occidente reemplazando a los números romanos, que dominaron por muchos siglos. Aunque el primer manuscrito europeo que utilizó los numerales árabes data del año 976 d C, ya en el año 1500 d C la aritmética explicaba el sistema de numeración arábigo con todo lujo de detalles.

<u>NÚMEROS NATURALES</u> (N)

Para indicar cuantos objetos manejamos usamos los números naturales, desde el uno, dos, tres, y hasta donde quieras llegar.
“N” indica el conjunto de los números naturales. Son los que usamos para nombrar y contar cantidades de cosas (objetos).

Operaciones con Números Naturales:

Suma o adición: Siempre es posible con todos los números del conjunto N. Por ejemplo:

$$8 + 3 = 11 \text{ donde 8 y 3 son llamados sumandos.}$$

Es *conmutativa* porque el orden de los sumandos no influye en la suma:

$$5+4 = 4+5$$

Además es *asociativa,* o sea, no de depende del orden en que se agrupan los sumandos:

$$(2+7)+4 = 2+ (7+4)$$

Resta, sustracción o diferencia: Sólo es posible entre minuendo (m) y sustraendo (s) cuando s < m (el sustraendo es menor que el minuendo). Por ejemplo:

$$12 - 2 = 10 \quad \text{en donde 12 es llamado minuendo y 2 es llamado sustraendo}$$

Atención: No es conmutativa ni asociativa.

Multiplicación o producto: Pueden pensarse como una suma abreviada cuyos sumandos son iguales: Por ejemplo:

$$3 \times 4=3+3+3+3=12 \quad \text{donde 3 y 4 se llaman factores}$$

Es *conmutativa* pues el orden de los factores no altera la multiplicación. Por ejemplo:

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

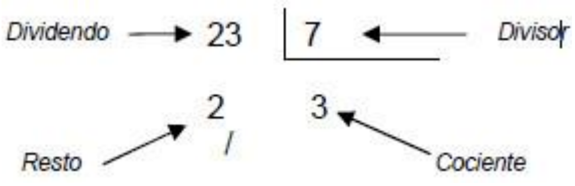
Si multiplicamos más de dos factores vemos que además es *asociativa*, pues no depende de la forma en que se agrupen los factores. Por ejemplo:

$$(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$$

Es *distributiva* frente a la suma y a la resta. Por ejemplo:

$$(2 + 5) \times 4 = 2 \times 4 + 5 \times 4 \quad (8 - 3) \times 5 = 8 \times 5 - 3 \times 5$$

División o cociente: La división entre dividendo y divisor da por resultado un cociente y un resto. Por ejemplo:



Por lo tanto el Dividendo (D) es igual al Divisor (d) multiplicado por el Cociente (c) más el Resto (r), y el Resto es menor que el Divisor.

Aclaración:

a) El cociente indica las veces que el divisor está dentro del dividendo

b) Todo número al ser dividido por uno, conserva su valor

c) La división por cero está PROHIBIDA.

Por ejemplo: 23 : 7 = 3 con un resto de 2. Entonces: $23 = 3 \times 7 + 2$

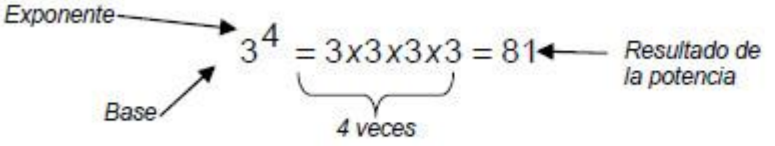
Si el resto es cero, la división es exacta. La división exacta es la operación inversa de la multiplicación:

$$D : d = c \quad D = c \times d$$

Si el resto es distinto de cero, el cociente se llama entero, pues indica la cantidad de veces que el divisor está contenido en el dividendo. Observa que el resto será menor que el divisor para terminar la operación de dividir. ¿Por qué?

La división *no es conmutativa ni asociativa.*

***Potenciación**: Es una multiplicación abreviada de factores iguales, involucrando una base, un exponente y una potencia resultante. El exponente indica el número de veces que la base aparece como factor repetido, dando la potencia como resultado. Por ejemplo:



Aclaración:

a) Uno elevado a cualquier exponente, da uno.

b) Cero elevado a cualquier exponente distinto de cero, da cero

c) Todo número distinto de cero, elevado a la cero, da uno.

La potencia *no es conmutativa,* porque no se pueden conmutar el exponente con la base, y *no es distributiva* con la adición ni la sustracción, pero *si lo es* con respecto al producto y el cociente. Así:

$$(3x7)^2 = 3^2\, x7^2 \quad \text{y} \quad (9:4)^3 = 9^3 : 4^3$$

Radicación: Es la operación inversa de la potenciación de exponente natural.

Raíz Cuadrada (o de índice 2): Es el número resultante de la raíz cuadrada que al elevarlo al cuadrado da el número que estaba dentro de la raíz. Por ejemplo: la raíz cuadrada de 49 es:

$$\text{Índice} \longrightarrow \sqrt[2]{49} = 7 \text{ porque } 7^2 = 49$$

Raíz Cúbica (o de induce 3): es el número resultante de la raíz cúbica que elevado al cubo da el cubo perfecto. Por ejemplo: la raíz cúbica de 64 es:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \text{ porque } 4^3 = 64$$

La raíz de cualquier índice *no es conmutativa, ni asociativa, ni distributiva* con la suma ni la resta. Por ejemplo:

$\sqrt[2]{16+9} = \sqrt[2]{25} = 5$ pero no es igual a $\sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9} = 4 + 3 = 7$

Al igual que la potencia, es *distributiva* respecto al producto y al cociente. Por ejemplo:

$$\sqrt[2]{25x36} = \sqrt[2]{25}\ x\ \sqrt[2]{36} = 5x6 = 30$$

$$\sqrt[3]{27:8} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{8} = 3:2 = 1{,}5$$

<u>NUMEROS ENTEROS</u> (Z)

Los vamos a definir después de varios ejemplos que dan evidencia de su existencia y utilidad en lo cotidiano:
Tengo una pecera de 35cm de alto con un castillo de cerámica sumergido de unos 28cm desde el fondo hasta su punta más alta. Dicha punta es la referencia que tomo para vigilar el nivel de agua que para mi gusto es de 2cm por encima de esa referencia.

Si por unos días no la miro, me pasó alguna vez que el nivel bajó hasta tres centímetros de la punta. Entonces si el nivel está a mi gusto lo llamo +2cm y cuando bajó mucho es -3cm. A la referencia la nombro como nivel cero.

La era cristiana indica como negativos a los años previos al nacimiento de Jesús, por ejemplo: *“Sócrates nació por el 470 antes de Cristo (470 a C), por eso será el año -470”.*

La temperatura también la puedo escribir como negativa o positiva según sea menos o más que cero.

Para indicar profundidades en el mar, tomamos el valor cero (en metros) como el nivel normal del mar. Si algo está sumergido un metro bajo el agua le asigno la posición -1m, y si lo está a una profundidad de 2m le asigno la posición -2m.

Para indicar elevaciones por encima del nivel del mar expresamos esa elevación medida desde ese cero. Por ejemplo una sierra montañosa alcanza los 345m le asigno la posición +345m.
Las cuestiones de dinero también las puedo pensar así: Si cobro lo indico positivo y si lo gasto será negativo. Por ejemplo: si Ana pide a su mamá $ 10 y va a comprar a la librería y gasta $ 7, le quedan $ 3:

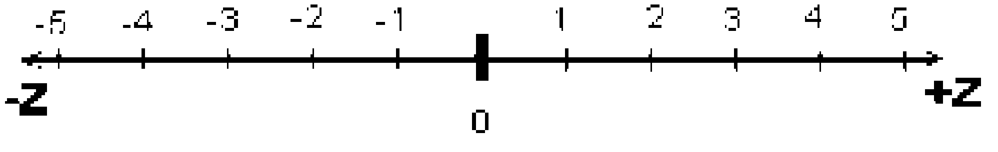
$ 10 (recibe Ana) - $ 7 (gasta) = $ 3 (conserva)

Pero ¿qué pasa si gasta otros $ 5? Queda debiendo $ 2. Esto lo podemos expresar así:

$ 3 (que conservaba) - $ 5 (gasta) = - $ 2 (queda debiendo)

Teniendo en cuenta los números que antes llamamos naturales, y estos últimos que se les parecen pero que son negativos, los reunimos (positivos y negativos) y formamos el conjunto de los números enteros, que llamaremos "Z". Este conjunto contiene una sucesión cerca del cero como la siguiente: ...,-3,-2,-1, 0+1 +2+3,...

Los números podemos representarlos en forma vertical, como en un termómetro, con los números positivos "arriba" del cero y los negativos por "debajo" del cero. Los podemos prolongar hacia arriba y hacia abajo tanto como uno quiera.
Pero también podemos representarlos sobre una recta horizontal, separados un centímetro entre ellos, marcando el cero en el centro:



Operaciones con Números Enteros:

Suma o adición: Siempre es posible con todos los números del conjunto Z. Por ejemplo:

3 + 2 = 6 -3 + 7 = 4

Resta, sustracción o diferencia: Siempre es posible con todos los números del conjunto Z.

Por ejemplo: -3 - 7 = - 10

3 - 2 = 3

¿Cómo resuelvo: 2 - (- 7)?
En este caso, el primer signo negativo "invierte" el significado del número -7, es decir, lo convierte en positivo. Por eso decimos que el signo "menos" delante de un paréntesis cambia el sentido del resultado contenido en dicho paréntesis.
En la vida cotidiana hay cosas que no tienen sentido asignarle valores negativos, pero a otras cantidades sí tiene sentido atribuirles significado a ambas cantidades, positivas y negativas:

Multiplicación o producto:

La multiplicación de números enteros da por resultado otro número entero.

Es *conmutativa*:

2 x 4 = dos veces cuatro = 4 + 4

4 x 2 = cuatro veces dos = 2 + 2 + 2 + 2

Es *asociativa:*

3 x 5 x 2 = (3 x 5) x 2 = 3 x (5 x 2)

Es *distributiva* respecto de la suma y la resta

2 x 4 = 2 x (3 + 1) = 2 x 3 + 2 x 1 = 6 + 2 = 8

2 x 4 = 2 x (6 - 2) = 2 x 6 - 2 x 2 = 12 - 4 = 8

Si uno de los factores es negativo, el producto da el mismo valor numérico que daría si fueran positivos los dos, pero con signo negativo:

3x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = - 6

Pronto aprenderás a reemplazar el signo “x” de la multiplicación por “.”

El número 1 es un elemento neutro para la multiplicación, ya que a cualquier número que lo multiplique por 1, me vuelve a dar el mismo número.

División o cociente: La división entre dos números enteros no siempre es exacta, por lo tanto, no siempre el resultado de la división está dentro del campo de los números enteros. Por ejemplo:

10 : 5 = 2 El resultado es un número entero

5 : 2 = 2,5 El resultado no es unnúmero entero

La división es sólo *distributiva* a derecha respecto de la suma o de la resta. Por ejemplo:

(10 + 2) : 2 = 10 : 2 + 2 : 2 = 5 + 1 = 6 Pero no lo es al revés. Por ejemplo:

12 : (2 + 4) / 12 : 2 + 12 : 4 = 6 + 3 = 9

REGLA DE LOS SIGNOS:

Esta regla te permite saber qué signo tendrá un resultado, según el signo de los factores:

(+) x (+) = (+)	Se lee: “más por más, más”
(+) x (-) = (-)	Se lee: “más por menos, menos”
(-) x (-) = (+)	Se lee: “menos por menos, más”
(-) x (+) = (-)	Se lee: “menos por más, menos”

O sea, el producto de factores de distinto signo da un resultado negativo, y el producto de signos iguales es positivo. La misma “Regla de los Signos” se aplica en la división. Por ejemplo:

5 x 3 = 15	15 : 3 = 5
5 x (- 3) = - 15	15 : (-3) = - 5
(- 5) x (- 3) = 15	(- 15) : (-3) = 5
(- 5) x 3 = - 15	(- 15) : 3 = - 5

EJERCICIOS Y PROBLEMAS:

NUMEROS NATURALES:

1) Escribí en letras los siguientes números naturales:
   21 ....
   29..
   27..
   16..
   32..
   31 ....
   64..
2) Escribí con palabras los siguientes números naturales:
   32146 ....
   263348 ....
   564213 ....
   2194376 ....
3) ¿Cuál es el menor número natural de tres cifras no nulas distintas? ¿Cuál es el mayor?
4) Escribí los números correspondientes a:
   La mitad de quinientos mil: ....
   Cien menos que un millón: ....
   Seis menos que diez mil: ....
   El doble de ciento veinticinco mil:..
   La cuarta parte de diez mil: ....
   El mayor número natural formado por tres cifras no nulas, pares y no repetidas.........................
   El menor número natural formado por tres cifras no nulas, pares y no repetidas ....
5) Formar números con las cifras indicadas:
   Cinco unidades con una decena: ....
   Siete decenas con seis unidades:...
   Catorce decenas con tres unidades:..
   Ciento cuarenta y ocho decenas con cinco unidades:...
   Trece centenas con veintitrés unidades:..
   Cinco unidades de mil con dos decenas:..
   Veinticinco unidades con ciento tres centenas ....
   6) ¿Cuántas vueltas da cada una de las agujas del reloj: la horaria, la de los minutos y la de los segundos, en un día? ¿y en una semana?

NUMEROS ENTEROS:

1) Volcar en la recta numérica los enteros: -14, 9, -19, -45, 94, -47, -69, 33, 0, 7.
2) Calcular "a" y "b", si: $b > -3$ y $b < a$; $6 > a > b$; $a= 4$
3) Completar la tabla siguiente:

a	**b**	**- a**	**- b**	**-(-a)**	**- (- b)**
2	5				
	3	7			
6			4		
	0			-3	
		1	-10		

4) ¿Cuáles son los enteros comprendidos entre:
   a) $x > 3$ y $x > 9$
   b) $x < 6$ y $x > 1$
   c) $x > -13$ y $x < -9$
5) Encontrar los números que no se alejan más de tres unidades del - 5.
6) Encontrar los números que se alejan menos de tres unidades del - 5.

7) Einstein murió en 1955 a la edad de 76 años ¿en qué año nació?..

8) Resolver suma y resta, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa:

a) 113-94-12+11 -7=...

124 -19 -94=...

30 -19=...

61-44+52 -50 -1-10+3=...

b) Resolver los cálculos de (a) agrupando todos los positivos y restale los negativos agrupados.

c) -7+2-6+19-4+8-15+34=...

-32+63= ....

9) Calcular los siguientes productos y cocientes:

a) 10x1= ____ 10x5=____________ 10x3=________ 10x(-81)= _________

10x(-2)=____ 10x99=___________ 10x(-4)= ______ 10x17=___________

b) Si se puede, aplica alguna propiedad como la asociativa o la conmutativa:

3 x (-6)= ....

(-1) x (-4) x (-1) x (-6)=...

(-2) x 11=...

3 x (-2) x (-1) x (-5)= ....

3 x (-6) x 2= ....

(-4) x (-5) x (-1) x 2 x (-1)=...

(-2) x 11 x (-3) =...

(-1) x 4 x (-1) x 5 x (-2)=...

c) Completar:

__ x (-4)=16

(-1) x (-3) x __ = -15

4 x __=-32

__x__x__ = -27

(-2) x (-4) x __= - 64

d) Resolver aplicando el producto distributivo sobre suma y resta:

7 x 2= 7 x (3-1)= ....

9 x (-81) = 9 x (90-9) =...

2 x (-3)=2 x (2-5)=...

13 x (-17) =13 x (3-20)=...

e) El aspecto de la operación se puede cambiar para llevarla a una estructura que permita hacer cuentas mentalmente: Por ejemplo:

Por ejemplo: 749 : 7= (700+49) : 7 = 700 : 7 + 49 : 7 = 100 + 7 = 107

121 : 11 = (99 + 22) : 11= 99 : 11 + 22 : 11 =...

981 : 9 = (900 + 81) : 9 = 900 : 9 + 81: 9 =...

3926:13= (3900+26):13=(39x100):13 + 26:13=...

RECORDAR QUE TODA OPERACIÓN COMBINADA SE SEPARA EN TERMINOS CON LOS SIGNOS DE SUMA Y RESTA, QUE SON LAS OPERACIONES PRIORITARIAS EN JERARQUIA FRENTE A LAS OTRAS. O sea que primero se resuelven los cocientes y luego las sumas y resta.

Otra forma de caracterizarlas es diciendo que son las operaciones más exteriores.
